TD$_{12}$ – Séries entières

Exercice 1 ★★

Déterminer le rayon de convergence R de chacune des séries entières suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \sqrt{n} z^n$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^2}{(2n)!} z^n$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n z^n$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^{2n}}{2^n+1}$;
5. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$;
6. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$;
7. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{ch} n}{n} z^n$;
8. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\operatorname{sh}(n)}{n} x^n$
9. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2n}}{n!}$;
10. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} \sin(n\theta)$;
11. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)}$.
12. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$

    où, pour $n \in \mathbb{N}$ a_n est le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n (e.g. $a_8 = 1$, $a_{232} = 3$).

Pour les séries entières de 6 à 11, déterminer la valeur de leur somme sur $]-R, R[$.

Exercice 2 ★★★

Calculer le développement en série entière au voisinage de 0 des fonctions suivantes (on précisera le domaine de validité) :

1. $f : x \mapsto \operatorname{ch} x \sin x$;
2. $f : x \mapsto \arcsin x$;
3. $f : x \mapsto -\dfrac{1-2x}{(2+x-x^2)^2}$;
4. $f : x \mapsto \sin^3 x$;
5. $f : x \mapsto \arctan(1+x^2)$.

Exercice 3 ★★

Soit f définie sur $]-1,1[$ par $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x^2}$. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 ★★

Déterminer, en justifiant son existence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{2n+1}}.$$

Exercice 5 ★★★

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!}$. Déterminer une expression simple de f en s'aidant de ses dérivées première et seconde.

Exercice 6 ★★

Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (3n+1)^2 x^n = 0$.

Exercice 7 ★★★

Montrer que $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

En déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^3x^n.$$

Exercice 8 ★★

Soit $\sum a_nz^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Déterminer les rayons de convergence de $\sum \frac{a_n}{n!}z^n$ et $\sum \alpha^n a_n z^n$ où α est un nombre complexe.

Exercice 9 ★★★

On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1} \end{cases}$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$. En déduire le rayon de convergence R de la série $\sum a_nx^n$.
2. Montrer que sur $]-R, R[$, la somme S de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, et en déduire une expression de S sur $]-R, R[$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 10 ★★★★

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_ku_{n-k}$.

En considérant la série entière $\sum u_nx^n$, déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 11 ★★

Convergence et calcul de la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{2n+3}{5^n}$.

Exercice 12 ★★★

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$.

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Calculer $f(x)$ pour $x \in]-1, 1[$.

   On pourra trouver a et b tels que $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{a}{n-1} + \dfrac{b}{n+1}$
3. En déduire les sommes $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}$

Exercice 13 ★★★★

Soit f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ où $a_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer a_0 et a_1.
2. Prouver que (a_n) converge vers une limite $\ell \leqslant 1$.
3. Calculer $a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la valeur de ℓ.
4. Déterminer le rayon de convergence R de f.
5. Expliciter f.

Exercice 14 ★★★

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que définie par $a_0 = 1$ et $2a_n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} = 0$ pour $n \geqslant 1$. On considère la série entière $\sum a_n x^n$, on note R son rayon et f sa somme.

1. Calculer a_1, a_2 et a_3.
2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1, |a_n| < 1$. Qu'en déduire sur R ?
3. Montrer que, pour tout $|x| < R$, on a $f(x) = \frac{2}{1+e^x}$. En déduire que $R \leqslant \pi$.

Exercice 15 ★★

Développer en série entière les fonctions définies par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = e^{-x}\cos(x)$$

Exercice 16 ★★★

1. Développer en série entière $f : x \mapsto \frac{1}{2+x}$.
2. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$

3. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)}$.

Exercice 17 ★★★

Soit $(E) : (1-x)y'(x) + y(x) = x$ sur $]-1,1[$.

1. Résoudre (E).
2. Trouver, sans utiliser 1., les solutions de (E) développables en série entière (préciser les rayons)
3. Que dire de l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$?

Exercice 18 ★★★

On considère l'équation différentielle $(E) : x^2y'' + 4xy' + \left(2 - x^2\right)y = 1$.

1. Prouver que (E) possède une unique solution développable en série entière.
2. Exprimer cette solution à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 19 ★★★★

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est développable en série entières et préciser le rayon.
2. Donner une équation différentielle du premier ordre dont f est solution et en déduire son développement en série entière.
3. Préciser, en lien avec la question 1, une autre forme de ce développement.

Exercices issus d'oraux

Exercice 20 ★★

(Oral 2013, 2019)

On considère la suite de Fibonacci définie par $\begin{cases} F_0 = 0,\ F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$

1. Déterminer une expression de F_n en fonction de n.
2. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum F_n z^n$
3. Calculer la somme de cette série entière.

Exercice 21 ★★

(Oral 2014)

On pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$ et $F(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum \dfrac{x^n}{(n+1)!}$ et calculer $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
2. Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et expliciter ce développement en série entière.

Exercice 22 ★★★

(Oral 2015)

On pose $f(x) = \cos(\sqrt{x})$ si $x \geqslant 0$ et $\mathrm{ch}(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.

1. Montrer que f admet un développement en série entière au voisinage de 0 et le déterminer.
2. Déterminer $f'(0)$ et $f''(0)$.
3. Étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.

Exercice 23 ★★★

(Oral 2018)

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

   On note f sa somme sur $]-R, R[$
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$
3. En déduire f à l'aide des fonctions usuelles.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}} \underset{n\to 0}{\longrightarrow} 1$.

   D'après le critère de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sqrt{n} z^n$ est de rayon de convergence 1.

2. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(2n)!} z^n$;

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{\dfrac{(n+1)^2}{(2n+2)!}}{\dfrac{n^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{n^2(2n+2)(2n+1)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

   D'après le critère de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{n^2}{(2n)!} z^n$; est de rayon de convergence ∞.

3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$;

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \exp\left(n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp(1+o(1)) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^1\end{aligned}$$

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \dfrac{\mathrm{e}^1}{\mathrm{e}^1} = 1$

   D'après le critère de D'Alembert la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n z^n$ est de rayon de convergence 1.

4. On ne peut pas appliquer le critère de D'Alembert ici. On revient à la définition.

   On cherche les réels $r \geqslant 0$ tels que $\left(\dfrac{r^{2n}}{2^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

   Si $r < \sqrt{2}$ on a $\dfrac{r^{2n}}{2^n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{r^{2n}}{2^n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

   Ainsi $\sup\left\{r \geqslant 0 \text{ , } \left(\dfrac{r^{2n}}{2^n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ bornée}\right\} = \sqrt{2}$.

   La série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{z^{2n}}{2^n+1}$ est donc de rayon de convergence $\sqrt{2}$.

5. On sait que, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $1+2+\cdots+n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\dfrac{\frac{2}{(n+1)(n+2)}}{\frac{2}{n(n+1)}} = \dfrac{n}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

D'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{1+2+\cdots+n}$ est de rayon de convergence 1.

6. On sait que les séries entière $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon, ainsi $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ ont même rayon.
La série entière $\sum_{n\geqslant 0} z^n$ est de rayon 1 ainsi la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^2 z^n$ est de rayon 1.

Pour $x \in]-1,1[$ posons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$.

Alors, pour $x \in]-1,1[$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1}, \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

D'où

$$\sum_{n\geqslant 0} n^2 x^n = x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$$

7. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{ch}(n+1)}{n+1}}{\frac{\mathrm{ch}(n)}{n}} &= \frac{n}{n+1} \frac{\mathrm{e}^{n+1} + \mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 1 \frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^n} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}
\end{aligned}$$

D'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Posons $S : \left]-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^n$

Pour $x \in \left]-\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right[$ on a

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{ch}(n) x^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}{2} x^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{e}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}x)^{n-1} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1}x)^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{e}}{2} \frac{1}{1-\mathrm{e}x} + \frac{\mathrm{e}^{-1}}{2} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}x}
\end{aligned}$$

Ainsi, par primitivation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{ch}(n)}{n} x^n = S(0) - \frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}x) - \frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-1}x) = -\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}x) - \frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-1}x)$$

8. Comme précédemment on a

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{sh}(n+1)}{n+1}}{\frac{\mathrm{sh}(n)}{n}} &= \frac{n}{n+1}\frac{\mathrm{e}^{n+1}-\mathrm{e}^{-n-1}}{\mathrm{e}^{n}-\mathrm{e}^{n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 1\frac{\mathrm{e}^{n+1}}{\mathrm{e}^{n}} \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}
\end{aligned}$$

D'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{sh}(n)}{n}x^n$ est de rayon de convergence $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

Et, pour $x \in \left]-\mathrm{e}^{-1},\mathrm{e}^{-1}\right[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{sh}(n)}{n}x^n = -\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}x)+\frac{1}{2}\ln(1-\mathrm{e}^{-1}x)$$

9. Pour $r \geqslant 0$ on a toujours $\lim_{n\to+\infty}\frac{r^{2n}}{n!}=0$. Ainsi la suite $\left(\frac{r^{2n}}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour tout réel positif $r \geqslant 0$.

   Ainsi la série entière $\sum_{n\geqslant 0}\frac{z^{2n}}{n!}$ est de rayon de convergence ∞.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{n!} = \exp(x^2)$$

10. Pour $|x|>1$, le terme général ne tend pas vers 0 et pour $|x|<1$, on $\left|\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)\right| \leqslant x^n$, donc la série est absolument convergente.

    Ainsi la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$ est de rayon 1.

    Pour $x \in]-1,1[$ posons $S(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$.

    Pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}
S'(x) &= \sum_{n\geqslant 1}\sin(n\theta)x^{n-1} \\
&= \sum_{n\geqslant 1}\frac{\mathrm{e}^{in\theta}-\mathrm{e}^{-in\theta}}{2i}x^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2i}\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{i\theta}x\right)^{n-1} - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{-i\theta}x\right)^{n-1} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{2i}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{i\theta}x} - \frac{\mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-i\theta}x} \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}x} - \frac{e^{-i\theta}}{1-\mathrm{e}^{-i\theta}x}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}{(1-\mathrm{e}^{i\theta}x)(1-\mathrm{e}^{-i\theta}x)}\right) \\
&= \frac{\sin(\theta)}{1-x^2-2\cos(\theta)x}
\end{aligned}$$

    Donc S est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0. On obtient, pour $x \in]-1,1[$

$$S(x) = \arctan\left(\frac{x-\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right) + \arctan\left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)$$

11. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = 1$, ainsi, d'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$ est de rayon de convergence 1.

    Pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n(n+1)} &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1}\\ &= \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} - \sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n+1}\\ &= -\ln(1-x) - \sum_{n\geqslant 2} \frac{x^{n-1}}{n}\\ &= -\ln(1-x) - \frac{1}{x}\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^n}{n} + 1\\ &= -\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x)}{x} + 1\end{aligned}$$

12. $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$

    Pour $n \geqslant 1$ on a $1 \leqslant a_n \leqslant n$

    Les séries entières $\sum z^n$ et $\sum n z^n$ sont de rayon 1, ainsi la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon 1.

a_n

On a en fait $a_n = \lfloor \log_{10}(n) \rfloor + 1$.

Corrigé de l'exercice 2

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{ch}(x)\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x} - \mathrm{e}^{(1-i)x} + \mathrm{e}^{(-1+i)x} - \mathrm{e}^{(-1-i)x}}{4i}$$

   Les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^{(1+i)x}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{(1-i)x}$, $x \mapsto \mathrm{e}^{(-1+i)x}$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{(-1-i)x}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$. Par somme f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\mathrm{e}^{(1+i)x} - \mathrm{e}^{(1-i)x} + \mathrm{e}^{(-1+i)x} - \mathrm{e}^{(-1-i)x}}{4i}\\ &= \frac{1}{4i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(1-i)^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1+i)^n x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1-i)^n x^n}{n!}\right)\\ &= \frac{1}{4i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left((1+i)^n - (1-i)^n + (-1+i)^n - (-1-i)^n\right)\frac{x^n}{n!}\right)\end{aligned}$$

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}(1+i)^n - (1-i)^n + (-1+i)^n - (-1-i)^n &= \sqrt{2}^n \left(e^{\frac{in\pi}{4}} - e^{\frac{-in\pi}{4}} + e^{\frac{3in\pi}{4}} - e^{\frac{-3in\pi}{4}}\right)\\ &= 2\sqrt{2}^n i \left(\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)\right)\\ &= 4\sqrt{2}^n i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)\\ &= \begin{cases} 4\sqrt{2}\dot{2}^p i(-1)^p \cos\left(\dfrac{(2p+1)\pi}{4}\right) & \text{si } n = 2p+1\ ,\ p \in \mathbb{N}\\ 0 & \text{si } n \text{ est pair}\end{cases}\end{aligned}$$

   Ainsi

$$f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}(-1)^p 2^p \cos\left(\frac{(2p+1)\pi}{4}\right)}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

2. f est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et, pour $x\in]-1,1[$, on a

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(-1)^n x^{2n}}{n!}$$

Cette série étant de rayon de convergence 1.

On peut par ailleurs remarquer que, pour $n\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{-1}{2}-n+1\right)&=\prod_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}-k\right)\\
&=(-1)^n\prod_{k=0}^{n-1}\frac{1+2k}{2}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{(2k+1)(2k)}{2k}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}\\
&=\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{(2n)!}{2^n n!}\\
&=\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}
\end{aligned}$$

Donc, par intégration, pour $x\in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}
\arcsin(x)&=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n n!}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\\
&=x+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\binom{2n}{n}}{4^n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}
\end{aligned}$$

3. f est définie sur $]-1,2[$ et, pour $x\in]-1,2[$ on a $f(x)=F'(x)$ où

$$F: x\mapsto\frac{1}{2+x-x^2}=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{1}{2-x}$$

F est la somme de deux fonctions développables en séries entières de rayons respectifs 1 et 2. Elle est donc développable en série entière sur $]-1,1[$. Comme F n'est pas définie en -1 elle n'est pas développable en série entière sur un intervalle plus grand.

Pour $x\in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}
F(x)&=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{3}\frac{1}{2-x}\\
&=\frac{1}{3}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}\\
&=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{2^n}\\
&=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{3}\left((-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $x \in]-1,1[$ on a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3}\left((-1)^n + \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{3}\left((-1)^{n+1} + \frac{1}{2^{n+2}}\right)x^n$$

f est donc développable en série entière sur $]-1,1[$.

4. Par linéarisation, pour $x \in \mathbb{R}$ on a $\sin^3(x) = \dfrac{1}{4}\sin(3x) - \dfrac{3}{4}\sin(x)$.

   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(3^{2n+1}-3)}{4(2n+1)!}x^{2n+1}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \operatorname{Arctan}(1+x^2)$ et $g(x) = \operatorname{Arctan}(1+x)$.

   g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{2+2x+x^2} \\
&= \frac{1}{2\left(1 - \frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)\left(1 - \frac{x\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{i+1}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}} + \frac{1-i}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}} + \frac{\mathrm{e}^{\frac{-i\pi}{4}}}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{-\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}}\right)
\end{aligned}$$

   Pour $|x| < \sqrt{2}$, on a

$$\frac{1}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n$$

   et

$$\frac{1}{1 - \frac{x\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n$$

   et ces séries sont absolument convergentes.

   D'où, pour $|x| < \sqrt{2}$,

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x\mathrm{e}^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n + \mathrm{e}^{-\frac{i\pi}{4}}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x\mathrm{e}^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{n+3}}\left(\mathrm{e}^{\frac{i(3n+1)\pi}{4}} + \mathrm{e}^{\frac{-i(3n+1)\pi}{4}}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}}\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{4}\right)x^n
\end{aligned}$$

   On pose $a_n = \left(\dfrac{x^{\frac{3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n$ et $b_n = \left(\dfrac{e^{\frac{-3i\pi}{4}}}{\sqrt{2}}\right)^n$.

   Par intégration, on obtient, pour $x \in]-\sqrt{2},\sqrt{2}[$

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}^{n+1}(n+1)}\cos\left(\frac{(3n+1)\pi}{4}\right)x^{n+1} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{2}^n}\cos\left(\frac{(3n-2)\pi}{4}\right)x^n \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\sqrt{2}^n}\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right)x^n
\end{aligned}$$

Finalement, pour $x \in]-\sqrt[4]{2}, \sqrt[4]{2}[$ on obtient

$$f(x) = g(x^2) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{2}^n} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) x^{2n}$$

On vérifie à l'aide de la règle de D'Alembert que $R = \sqrt[4]{2}$.

Corrigé de l'exercice 3

f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{2n+1}$$

Par identification à la série de Taylor on a alors, pour $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ n! & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 4

Considérons la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Cette série a pour rayon de convergence 1.

On reconnaît le développement en série entière de la fonction arctan

Ainsi, pour $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)2^{2n+1}} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$$

Développements usuels

Si vous ne reconnaissez pas le développement de la fonction arctan vous pouvez retrouver le résultat en dérivant terme à terme, on retrouve alors bien le développement de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$

Corrigé de l'exercice 5

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!} = 0$ ainsi le rayon de convergence de la série entière qui définit g est infini.

g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$g'(x) = \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^{3p-1}}{(3p-1)!} \qquad g''(x) = \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^{3p-2}}{(3p-2)!}$$

Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$,

$$g''(x) + g'(x) + g(x) = \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^{3p-2}}{(3p-2)!} + \sum_{p\geqslant 1} \frac{x^{3p-1}}{(3p-1)!} + \sum_{0}^{+\infty} \frac{x^{3p}}{(3p)!} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$$

g est donc solution de $y'' + y' + y = e^x$ et vérifie $g(0) = 1$ et $g'(0) = 0$.

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme

$$x \mapsto e^{-\frac{x}{2}} \left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right) + \frac{e^x}{3}, \qquad \text{où } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

Des conditions initiales, on déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = \frac{2}{3} e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) + \frac{e^x}{3}$$

Corrigé de l'exercice 6

On a $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{(3n+4)^2}{(3n+1)^2} = 1$, d'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n$ est de rayon 1.

On en déduit dans un premier temps que notre équation n'a de sens que si $x \in]-1,1[$ puisque la série diverge grossièrement si $|x| > 1$ et si $x = 1$ ou -1.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a $(3n+1)^2 = 9n(n-1) + 15n + 1$, ainsi, pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n &= 9x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + 15x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\
&= 9x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + 15x \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1-x)} \\
&= \frac{18x^2 - 15x^2 + 15x + x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3} \\
&= \frac{4x^2 + 13x + 1}{(1-x)^3}
\end{aligned}$$

On a alors $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$ si et seulement si $4x^2 + 13x + 1 = 0$

Le polynôme $4X^2 + 13X + 1$ a pour racines $\dfrac{-13+3\sqrt{17}}{8}$ et $\dfrac{-13-3\sqrt{17}}{8}$

Puisque $16 < 17 < 25$ on a $4 < \sqrt{17} < 5$, d'où

$$\frac{-1}{8} < \frac{-13+3\sqrt{17}}{8} < \frac{2}{8} \quad \text{et} \quad \frac{-28}{8} < \frac{-13-3\sqrt{17}}{8} < \frac{-25}{8}$$

Seul $-\dfrac{13}{8} + \dfrac{3\sqrt{17}}{8}$ appartient à $]-1,1[$.

Ainsi l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty}(3n+1)^2 x^n = 0$ a pour unique solution $\dfrac{-13+3\sqrt{17}}{8}$.

Corrigé de l'exercice 7

La famille $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ est une famille de polynômes échelonnés en degrés, elle est donc libre. Il s'agit d'une famille libre de cardinal 4 dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui est de dimension 4, c'est donc une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

On peut alors décomposer $(X-1)^3$ dans cette base. On a

$$(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = X(X-1)(X-2) + X - 1$$

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^3 x^n$ a pour rayon de convergence 1 d'après le critère de D'Alembert.

Pour $x \in]-1,1[$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^3 x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

Or on a $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, d'où, par dérivation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x\sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Séries géométriques dérivées

Vous devez connaître le rayon et la somme de la série géométrique $\sum x^n$, ses dérivées s'en déduisent facilement mais il peut être utile d'apprendre leurs valeurs (au moins les deux premières).

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^n = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n = x^3 \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^{n-3} = \frac{6x^3}{(1-x)^4}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(n-1)^3x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)(n-2)x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{6x^3}{(1-x)^4} + \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{6x^3 + x(1-x)^2 - (1-x)^3}{(1-x)^4} \\ &= \frac{8x^3 - 5x^2 + 4x - 1}{(1-x)^4}\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 8

Par définition on sait que, si $0 \leqslant r < R$ alors la suite $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $r > R$ alors la suite $(|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Soit $r \in [0, R[$ et $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a alors

$$\frac{a_n}{n!}\rho^n = a_n r^n \frac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}{n!}$$

Or $(a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{\rho}{r}\right)^n}{n!} = 0$.

Ainsi la suite $\left(\dfrac{a_n}{n!}\rho^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ceci pour tout réel $\rho \geqslant 0$. On en déduit que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon $+\infty$.

Définition

Ici on n'a aucune information sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc pas d'autre choix que de revenir à la définition.

Remarquons que la série entière $\sum \alpha^n a_n z^n$ est la série $\sum a_n z^n$ évaluée en αz.

- si $|\alpha z| < R$, alors la série $\sum \alpha^n a_n z^n$ converge absolument
- si $|\alpha z| > R$, alors la série $\sum \alpha^n a_n z^n$ diverge grossièrement

Le rayon de la série entière $\sum \alpha^n a_n z^n$ est ainsi $\dfrac{R}{|\alpha|}$ si $\alpha \neq 0$ et $+\infty$ si $\alpha = 0$.

Corrigé de l'exercice 9

1. On va procéder par récurrence double sur n.

   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $1 \leqslant a_n \leqslant n^2$ ».

   Initialisation :

   On a $a_1 = 1 \in [1, 1]$ et $a_2 = 2 \in [1, 4]$, donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.

   Hérédité :

   Soit $n \geqslant 2$, on suppose que $\mathcal{P}(n-1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies.

   On a alors

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \geqslant a_n \geqslant 1 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}$$

   $$a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1} \leqslant n^2 + \frac{2(n-1)^2}{(n+1)}$$

.
Or $2(n-1)^2 = 2n^2-4n+2$ et $(2n+1)(n+1) = 2n^2+3n+1$, donc $2(n-1)^2 \leqslant (2n+1)(n+1)$, d'où $\dfrac{2(n-1)^2}{(n+1)} \leqslant 2n+1$

Ainsi $a_{n+1} \leqslant n^2+2n+1 = (n+1)^2$.

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie : la récurrence est établie.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*, 1 \leqslant a_n \leqslant n^2$

Or les séries entières $\sum z^n$ et $\sum n^2 z^n$ ont pour rayon de convergence 1.

Par encadrement, la série $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence 1.

2. Plaçons nous sur $]-1,1[$ et posons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

On a alors $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n$.

Ainsi par définition de la suite (a_n),

$$\begin{aligned} S'(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)\left(a_n + \frac{2}{n+1}a_{n-1}\right)x^n \\ &= 1 + x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} \\ &= S(x) + xS'(x) + 2xS(x) \end{aligned}$$

On a ainsi

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad (x-1)S'(x) + (2x+1)S(x) = 0$$

Sur $]-1,1[$ S est ainsi l'unique solution du problème de Cauchy $\begin{cases} (x-1)y'(x) + (2x+1)y(x) = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

On a

$$\forall x \neq 1, a(x) = -\frac{2x+1}{x-1} = -2 - \frac{3}{x-1}$$

Une primitive A de a est $A : x \mapsto -2x - \dfrac{1}{3}\ln(1-x)$.

Sur cet intervalle, la solution générale de l'équation s'écrit $y : x \mapsto K\dfrac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$ où $K \in \mathbb{R}$

On a $S(0) = a_0 = 1$ et donc

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad S(x) = \frac{e^{-2x}}{(1-x)^3}$$

Corrigé de l'exercice 10

On va procéder par analyse-synthèse

<u>Analyse :</u>

On suppose que la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ a un rayon de convergence R strictement positif. Soit f sa somme.

On a alors, d'après le théorème du produit de Cauchy, pour $x \in]-R, R[$,

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k} \right) x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^{n-1} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour $x \in]-R, R[$,

$$xf^2(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = f(x) - u_0 = f(x) - 1$$

On a ainsi

$$\forall x \in]-R, R[, \qquad xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$$

D'où

$$\forall x \in]-R, R[\setminus\{0\}, \qquad f(x) \in \left\{ \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \right\}$$

Sauts ?

On a deux expressions possibles pour $f(x)$ mais à priori rien n'empêche que $f(x)$ soit égale à une expression pour certaines valeurs et l'autre pour d'autres valeurs. On va montrer que c'est ici impossible.

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ donc $x \mapsto 2xf(x) - 1$ également. Ainsi $\frac{1}{4} \notin]-R, R[$, on a donc $R < \frac{1}{4}$.

Sur $]-R, R[$ la fonction $x \mapsto \dfrac{2xf(x)-1}{\sqrt{1-4x}}$ est continue et à valeurs dans $\{-1, 1\}$. Si elle n'est constante alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle s'annule sur $]-R, R$ ce qui est impossible.

Ainsi on a

$$f \in \left\{ x \mapsto \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}, x \mapsto \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} \right\}$$

Or f est continue en 0, donc $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x})$.

On en déduit que si $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif, alors sa somme vaut $\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Or, par développement usuels on a

$$\forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[, \qquad \sqrt{1-4x} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) (-4x)^n$$

On en déduit que $u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{1}{2} - 1 \right) \left(\dfrac{1}{2} - n + 1 \right) \dfrac{(-4)^{n+1}}{-2}$.

<u>Synthèse :</u>

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{(n+1)!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) \frac{(-4)^{n+1}}{-2}$$

On a bien $v_0 = 1$

De plus $\left| \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \right| \underset{n\to+\infty}{\sim} 4$. Donc, par la règle de D'Alembert, la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{4}$.

Sa somme f vérifie

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \qquad f(x) = \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x})$$

D'où

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \qquad xf^2(x) - f(x) + 1 = \frac{x}{4x^2}(1-2\sqrt{1-4x}+1-4x) - \frac{1}{2x}(1-\sqrt{1-4x}) + 1 = 0$$

On en déduit que, pour $x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}$

$$f^2(x) = \left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty} v_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}\right) x^n$$

et

$$f^2(x) = \frac{1}{x}(f(x)-1) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^n$$

On a donc

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\setminus \{0\}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}\right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_{n+1} x^n$$

Par unicité d'un développement en série entière, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} v_k v_{n-k}$$

De plus $v_0 = u_0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie de manière unique, donc , pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

Corrigé de l'exercice 11

Pour $x \in]-1, 1[$ on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty}(2n+3)x^n &= 2\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \\ &= \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{3}{1-x} \\ &= \frac{3-x}{(1-x)^2}\end{aligned}$$

D'où, puisque $\left|\frac{1}{5}\right| < 1$, la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+3}{5^n}$ converge absolument et

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{2n+3}{5^n} = \frac{3-\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{35}{8}$$

Corrigé de l'exercice 12

1. On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2-1}{(n+1)^2-1} = 1$, ainsi la série entière $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1}$ a pour rayon de convergence 1.
   De plus, $\frac{1}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$, ainsi, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge et $\sum_{n\geqslant 2} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$ converge absolument.
   Finalement f est définie sur $[-1, 1]$, d'après le théorème d'Abel radial elle est continue sur $[-1, 1]$. Elle n'est par contre de classe $\mathcal{C}^\infty$ que sur $]-1, 1[$.

2. Pour $n \geqslant 2$ on a $\dfrac{1}{n^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1}\right)$

   Ainsi, pour $x \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-x\ln(1-x) - \frac{1}{x}\left(-\ln(1-x) - x - \frac{x^2}{2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{x} + 1 + \frac{x}{2}\right) \\
&= \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}
\end{aligned}$$

   Pour $x = 0$ on a $f(0) = 0$ (on d'ailleurs bien $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} = 0$)

   Ainsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{4} & \text{si } x \in]-1,1[\setminus\{0\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. D'après le théorème d'Abel radial f est continue en 1, ainsi $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

   C'est-à-dire

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = f(1) = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4}$$

   On a $(1-x^2)\ln(1-x) = (1+x)(1-x)\ln(1-x) \underset{x\to 1}{\sim} 2(1-x)\ln(1-x)$.

   On sait que $\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$ ainsi $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\ln(1-x) = 0$. D'où

$$\lim_{x\to 1} \frac{(1-x^2)\ln(1-x)}{2x} + \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{3}{4}$$

   f est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour $x \in]-1,1[$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n\frac{x^{n-1}}{n^2-1} = -\frac{2(x^2+1)\log(1-x) + x^2 + 2x}{4x^2}$$

   La série $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1}$ est une série alternée convergente. D'après le théorème d'Abel radial f' est continue en -1, ainsi $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(-1)^{n-1}}{n^2-1} = f'(-1) = \lim_{x\to -1} f'(x)$. D'où

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1} = -\lim_{x\to -1} -\frac{2(x^2+1)\log(1-x) + x^2 + 2x}{4x^2} = \ln(2) - \frac{1}{4}$$

Corrigé de l'exercice 13

1. On a $a_0 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}$ et

$$a_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(t) \,\mathrm{d}t = \left[-\ln\left(|\cos(t)|\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\ln(2)}{2}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $\tan(t) \in [0,1]$, d'où $0 \leqslant \tan(t)^{n+1} \leqslant \tan(t)^n$.

   Par croissance de l'intégrale on en déduit que $0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n \leqslant 1$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers une limite $\ell \in [0,1]$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) \,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2}](t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)(1+\tan^2(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t) \tan'(t) \,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\tan(t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

   On a donc, pour tout entier n, $0 \leqslant a_n + a_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$.

   D'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + a_{n+2} = 0$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + a_{n+2} = 2\ell$. Par unicité de la limite on a donc $\ell = 0$.
4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$ on a $2a_n \geqslant a_n + a_{n+2}$. Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{1}{2n+2} \leqslant a_n \leqslant 1$$

   Les séries entière $\sum \dfrac{z^2}{2n+2}$ et $\sum z^n$ sont de rayon 1 ainsi, par encadrement, la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon 1.
5. Soit $x \in]-1,1[$. Pour $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \tan(t)^n x^n = \frac{1}{1 - x\tan(t)}$

   La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1 - x\tan(t)}$ continue sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, les fonctions $t \mapsto \tan(t)^n x^n$ sont continues et intégrables sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et la série $\sum \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} |x^n \tan(t)^n| \,\mathrm{d}t$ converge absolument.

   D'après le théorème d'intégration terme à terme on en déduit que la fonction $\dfrac{1}{1 - x\tan(t)}$ est intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - x\tan(t)} \,\mathrm{d}t = \sum \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \tan(t)^n \,\mathrm{d}t$$

   Ainsi, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - x\tan(t)} \,\mathrm{d}t$

Posons le changement de variable $u = \tan(t)$ dans cette intégrale, on a alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 - x\tan(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1-xu}\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\frac{ux+1}{u^2+1} + \frac{x^2}{x^2+1}\frac{1}{1-xu}\,\mathrm{d}u \qquad \textit{par décomposition en éléments simples} \\
&= \frac{x}{2x^2+2}\int_0^1 \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{x^2+1}\int_0^1 \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u + \frac{x}{x^2+1}\int_0^1 \frac{x}{1-xu}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{x}{2x^2+2}\left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 + \frac{1}{x^2+1}\left[\arctan(u)\right]_0^1 - \frac{x}{x^2+1}\left[\ln(1-xu)\right]_0^1 \\
&= \frac{\ln(2)x}{2x^2+2} + \frac{\pi}{4x^2+4} - \frac{x\ln(1-x)}{x^2+1} \\
&= \frac{2\ln(2)x + \pi - 4x\ln(1-x)}{4x^2+4}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad f(x) = \frac{2\ln(2)x + \pi - 4x\ln(1-x)}{4x^2+4}$$

Corrigé de l'exercice 14

1. On a $2a_1 + \frac{a_0}{1!} = 0$, d'où $a_1 = -\frac{1}{2}$.

   Puis $2a_2 + \frac{a_1}{1!} + \frac{a_0}{2!} = 0$, d'où $a_2 = 0$

   Enfin $2a_3 + \frac{a_2}{1!} + \frac{a_1}{2!} + \frac{a_0}{3!} = 0$, d'où $a_3 = \frac{1}{24}$.
2. On procède par récurrence forte sur n.

   <u>Initialisation :</u>

   On a vérifié la propriété aux rangs de 0 à 3 à la question précédente.

   <u>Hérédité</u>

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ on a $|a_k| \leqslant 1$.

   Alors

$$\begin{aligned}
|a_n| &= \frac{1}{2}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n-k}|}{k!} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \\
&\leqslant \frac{\mathrm{e}-1}{2} \\
&\leqslant 1
\end{aligned}$$

   Ce qui prouve la propriété au rang n et achève la récurrence.

   La série entière $\sum z^n$ est de rayon 1, ainsi par majoration, la série entière $\sum a_n z^n$ est de rayon $R \geqslant 1$.
3. Soit $x \in]-R, R[$, on a $1 + e^x = 2 + \sum_{k=1} \frac{x^k}{k!}$

Par produit de Cauchy, on a alors $f(x)(1+\mathrm{e}^x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ où pour $n \in \mathbb{N}$

$$c_n = 2a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\frac{1}{k!}$$

On a donc $c_0 = 2$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $c_n = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x)(1+\mathrm{e}^x) = 2$, d'où $f(x) = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}$.

De manière similaire, on a, pour tout z tel que $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^z}$.

La fonction $z \mapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^z}$ n'est pas définie en $i\pi$, ainsi $R \leqslant \pi$.

Corrigé de l'exercice 15

Pour $x \in]-1, 1[$ on a $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k!}$ et $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$.

D'où, par produit de Cauchy f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et, pour $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}$$

Comme f n'est pas définie en 1, f n'est pas développable en série entière sur un intervalle $]-R, R[$ avec $R > 1$

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{(-1+i)x} + \mathrm{e}^{(-1-i)x}}{2}$.

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{\mathrm{e}^{(-1+i)x} + \mathrm{e}^{(-1-i)x}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{((-1+i)^n + (-1-i)^n)}{n!} x^n \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n x^n}{n!}\left(\mathrm{e}^{\frac{3in\pi}{4}} + \mathrm{e}^{-\frac{3in\pi}{4}}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)}{n!} x^n
\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 16

1. Pour $x \in [-2, 2[$ on a

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$$

2. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{x^p}{2+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^{n+p} = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-p}}{2^{k+1-p}} x^k$$

Par primitivation terme à terme des séries entières on a, pour $t \in]-2, 2[$

$$\int_0^t \frac{x^p}{2+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=p}^{+\infty} \int_0^t \frac{(-1)^{k-p}}{2^{k+1-p}} x^k\,\mathrm{d}x = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-p}}{2^{k+1-p}} \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

D'où, comme $1 \in]-2,2[$

$$\int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=p}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-p}}{2^{k+1-p}} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$

$$\forall p \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^1 \frac{x^p}{2+x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+p+1)}$$

3. D'après la question précédente on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} = 2\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}\,\mathrm{d}x$.

   Par division euclidienne on a, pour $x \in [0,1]$

$$\frac{x^3}{2+x} = x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}$$

   D'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n(n+4)} &= 2\int_0^1 \frac{x^3}{2+x}\,\mathrm{d}x \\ &2\int_0^1 x^2 - 2x + 4 - \frac{8}{x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8\ln(x+2)\right]_0^1 \\ &= \frac{20}{3} - 16\ln(3) + 16\ln(2)\end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 17

1. Sur $]-1,1[$ l'équation (E) est équivalente à $y'(x) + \dfrac{1}{1-x}y(x) = \dfrac{x}{1-x}$

   Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto K\exp(\ln(1-x)) = K(1-x)$ où $K \in \mathbb{R}$

   Par la méthode de variation de la constante on trouve que la fonction $x \mapsto 1+(1-x)\ln(1-x)$ est une solution particulière de (E).

   Ainsi l'ensemble des solutions de (E) est $\{x \mapsto 1 + (1-x)\ln(1-x) + K(1-x)\ ,\ K \in \mathbb{R}\}$.

2. On procède par analyse-synthèse

   Analyse :

   Supposons que (E) admette une fonction développable en série entière de rayon $R > 0$. Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette solution.

   On a alors, pour $x \in]-R,R[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$

   Ainsi

$$\begin{aligned}(1-x)S'(x) + S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n)x^n\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière on a $a_1 + a_0 = 0$, $2a_2 = 1$ et, pour $n \geqslant 2$, $(n+1)a_{n+1} + (1-n)a_n = 0$

Ainsi $a_2 = \dfrac{1}{2}$ et, pour $n \geqslant 2$, $a_{n+1} = \dfrac{n-1}{n+1}a_n$.

On en déduit que, pour $n \geqslant 2$

$$a_n = a_2 \prod_{k=2}^{n-1} \frac{k-1}{k+1} = \frac{2(n-2)!}{n!}a_2 = \frac{1}{n(n-1)}$$

Une solution de (E) développable en série entière est donc de la forme $x \mapsto a_0(1-x) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$.

Synthèse :

D'après le critère de D'Alembert la série entière $S(x) = a_0(1-x) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$ est de rayon de convergence 1.

Sur $]-1,1[$ on a

$$S'(x) = -a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = -a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(1-x)S'(x) + S(x) &= a_0x - a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} + a_0 - a_0x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} \\
&= x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n(n-1)} \right) x^n \\
&= x
\end{aligned}$$

Finalement les solutions de (E) développables en série entière sur $]-1,1[$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto a_0(1-x) + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$

3. D'après les questions précédentes, toutes les solutions de (E) sur $]-1,1[$ sont développables en série entière.

Corrigé de l'exercice 18

On procède par analyse-synthèse

Analyse :

Supposons que (E) admette une fonction développable en série entière de rayon $R > 0$. Notons $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ cette solution.

On a alors, pour $x \in]-R,R[$, $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ et $S''(x) = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$

Ainsi

$$\begin{aligned}
x^2S''(x)+4xS'(x)+(2-x^2)S(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 4\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_nx^n + 4a_1x + 4\sum_{n=2}^{+\infty} na_nx^n + 2a_0 + 2a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_nx^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n(n(n-1)+4n+1)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}((n+2)(n+1)+4(n+2)+1)x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}\\
&= 2a_0 + 6a_1x + \sum_{n=0}^{+\infty}((n^2+7n+12)a_{n+2}-a_n)x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2}
\end{aligned}$$

Puisque S est solution de (E) alors, par unicité du développement en série entière on a $2a_0=1$, $6a_1=0$ et, pour tout $n\geqslant 0$, $(n^2+7n+12)a_{n+2}-a_n=0$.

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+2}=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}a_n$

Si n est impair alors, comme $a_1=0$, on a $a_n=0$.

Si n est pair alors, en notant $n=2p$, on a, pour $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
a_{2p} &= a_0\prod_{k=0}^{p-1}\frac{a_{2k+2}}{a_{2k}}\\
&= \frac{1}{2}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{1}{(2k+3)(2k+4)}\\
&= \frac{1}{2}\frac{2}{(n+2)!}\\
&= \frac{1}{(n+2)!}
\end{aligned}$$

Remarquons que cette formule est encore valable pour $n=0$.

Si S est une solution de (E) développable en série entière alors

$$S : x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n+2)!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n-2}}{n!} = \begin{cases}\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases}$$

Expression

Si on ne voit pas l'expression de S à l'aide des fonctions usuelles on continue en utilisant son expression comme somme d'une série entière : on détermine son rayon et on vérifie qu'elle est bien solution de l'équation différentielle en calculant S et S'' par dérivation termes à termes

Synthèse :

Soit $f : x\mapsto \begin{cases}\dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x\neq 0\\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x=0\end{cases} = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^{2n-2}}{n!}$. f est bien développable en série entière de rayon infini. En particulier f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $x=0$ on a bien $2f(0)=1$.

Pour $x\in\mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x)=\frac{x\,\mathrm{sh}(x)-2\,\mathrm{ch}(x)+2}{x^3},\qquad \text{et}\qquad f''(x)=\frac{(x^2+6)\,\mathrm{ch}(x)-4x\,\mathrm{sh}(x)-6}{x^4}$$

D'où

$$\begin{aligned}
x^2f''(x)+4xf'(x)+(2-x^2)f(x) &= \frac{(x^2+6)\,\mathrm{ch}(x)-4x\,\mathrm{sh}(x)-6}{x^2} + 4\frac{x\,\mathrm{sh}(x)-2\,\mathrm{ch}(x)+2}{x^2} + \frac{(2-x^2)(\mathrm{ch}(x)-1)}{x^2}\\
&= \frac{(x^2+6)\,\mathrm{ch}(x)-4x\,\mathrm{sh}(x)-6+4x\,\mathrm{sh}(x)-8\,\mathrm{ch}(x)+8+(2-x^2)ch(x)-2+x^2}{x^2}\\
&= \frac{x^2}{x^2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ainsi f est bien une solution de (E).

Finalement (E) admet une unique solution développable en série entière qui est

$$f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\mathrm{ch}(x)-1}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 19

1. Soit $g : x \mapsto \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$, d'après le théorème fondamental de l'analyse g est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $g' : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

   Par primitivation terme à terme g est donc développable en série entière de rayon infini.

   Puisque $x \mapsto \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$ est également développable en série entière de rayon infini on en déduit que, par produit de Cauchy, f est développable en série entière de rayon infini.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = x\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-x^2} = xf(x) + \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$$

   f est ainsi solution de l'équation différentielle $y - xy = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}$.

   Notons $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ le développement en série entière de f.

   On a alors $a_0 = f(0) = 0$ et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) - xf(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a_{n+1}x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} ((n+1)a_{n+1} - a_{n-1})x^n \end{aligned}$$

   Or $f'(x) - xf(x) = \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}$

   Ainsi, par unicité du développement en série entière on a $a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)a_{n+1} - a_{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^p}{2^p p!} & \text{si } x = 2p \text{ avec } p \in \mathbb{N} \end{cases}$$

   En d'autres termes, pour $p \in \mathbb{N}$ on a $(2p+2)a_{2p+2} = a_{2p}$ et

$$(2p+1)a_{2p+1} = a_{2p-1} + \frac{(-1)^p}{2^p p!}$$

   Par une récurrence aisée on a alors $a_{2p} = 0$ pour tout entier $p \in \mathbb{N}$. il n'y a par contre pas de formule générale simple pour les coefficients a_n avec n impair.
3. D'après la question 1. on a

$$f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} g(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}\right)$$

Par produit de Cauchy de séries absolument convergentes on a $f(x)\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$, où

$$\begin{aligned}
c_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}x^{2n-2k}}{2^{n-k}(n-k)!}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!}\\
&= (-1)^n x^{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2^{n-k}(2k+1)k!(n-k)!}\\
&= \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(2k+1)2^{n-k}}
\end{aligned}$$

La somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(2k+1)2^{n-k}}$ ne se simplifie pas plus.

Ainsi

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{(2k+1)2^{n-k}}\right)\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!}$$

Produit de Cauchy

Lorsque l'on a des séries entières avec des coefficients dépendant de la parité de n la formule du produit de Cauchy de deux séries entières est peu maniable mais on peut en général s'en sortir en utilisant la formule générale du produit Cauchy de séries absolument convergentes

---

Corrigé de l'exercice 20

1. $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Son polynôme caractéristique est $X^2 - X - 1$ qui a deux racines réelles $\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ et $\dfrac{1-\sqrt5}{2}$.

   Notons $\varphi = \dfrac{1+\sqrt5}{2}$, on peut remarquer que

   $$\frac{1-\sqrt5}{2} = \frac{1-\sqrt5}{2}\frac{1+\sqrt5}{1+\sqrt5} = \frac{1-5}{2}\frac{1}{1+\sqrt5} = \frac{-1}{\varphi}$$

   Il existe alors $(A,B)\in\mathbb{R}^2$ tels que

   $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad F_n = A\varphi^n + B\frac{(-1)^n}{\varphi^n}$$

   On a alors $A+B=0$ et $A\varphi - \dfrac{B}{\varphi} = 1$, d'où $A = \dfrac{\varphi}{\varphi^2+1}$ et $B = \dfrac{-\varphi}{\varphi^2+1}$

   Ainsi

   $$\forall n\in\mathbb{N},\qquad F_n = \frac{\varphi^{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{\varphi^{n-1}}}{\varphi^2+1}$$

2. Pour $n\in\mathbb{N}$ on a

   $$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\varphi^{n+2}+\frac{(-1)^n}{\varphi^n}}{\varphi^{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}}{\varphi^{n-1}}} = \frac{\varphi^{2n+2}+(-1)^n}{\varphi^{2n+1}+(-1)^{n-1}\varphi}$$

   Or $\varphi > 1$ ainsi $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\varphi^{2n+2}}{\varphi^{2n+1}}$' $\underset{n\to+\infty}{\sim} \varphi$

   D'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum F_n z^n$ est de rayon $\dfrac{1}{\varphi}$.

3. Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{\varphi}$, on a alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} F_n z^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varphi^{n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{\varphi^{n-1}}}{\varphi^2+1} z^n \\
&= \frac{\varphi}{\varphi^2+1}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \varphi^n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{-1}{\varphi}\right)^n z^n\right) \\
&= \frac{\varphi}{\varphi^2+1}\left(\frac{1}{1-\varphi z} - \frac{1}{1+\frac{z}{\varphi}}\right) \\
&= \frac{\varphi}{\varphi^2+1} \frac{1+\frac{z}{\varphi} - (1-\varphi z)}{(1-\varphi z)\left(1+\frac{z}{\varphi}\right)} \\
&= \frac{1}{\varphi^2+1} \frac{z(\varphi^2+1)}{1-\left(\varphi+\frac{1}{\varphi}\right)z - z^2} \\
&= \frac{z}{1-z-z^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \dfrac{1}{\varphi}$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} F_n z^n = \frac{z}{1-z-z^2}$.

Corrigé de l'exercice 21

1. On a, pour $n \in \mathbb{N}$ $\dfrac{(n+1)!}{(n+2)!} = \dfrac{1}{n+2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ainsi, par critère de D'Alembert la série $\displaystyle\sum \frac{x^n}{(n+1)!}$ est de rayon infini.

   Pour $x \in \mathbb{R}$ on a
   $$x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x - 1$$

   Et $f(0) = \dfrac{1}{1!} = 1$

   Ainsi $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

2. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t} f(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F'(x) = \mathrm{e}^{-x} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. Pour $x \neq 0$ on a
   $$\begin{aligned}
   F'(x) &= \frac{1}{x}\left(1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}\right) \\
   &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!} \\
   &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{n-1}}{n!} \\
   &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)!}
   \end{aligned}$$

   On remarque que ce développement est également valable en 0.

Par primitivation terme à terme, F est développable en série entière de rayon de convergence infini et, pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1) \times (n+1)!}$$

Corrigé de l'exercice 22

1. Pour $x \geqslant 0$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(\sqrt{x}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \end{aligned}$$

Pour $x < 0$ on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathrm{ch}(\sqrt{-x}) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{-x}^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$.

La série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n)!}$ est de rayon infini, f est donc développable en série entière de rayon infini.

2. Par identification du développement en série entière et de la série de Taylor on a $f'(0) = \dfrac{-1}{2!} = -\dfrac{1}{2}$ et $f''(0) = 2!\dfrac{(-1)^2}{4!} = \dfrac{1}{12}$.

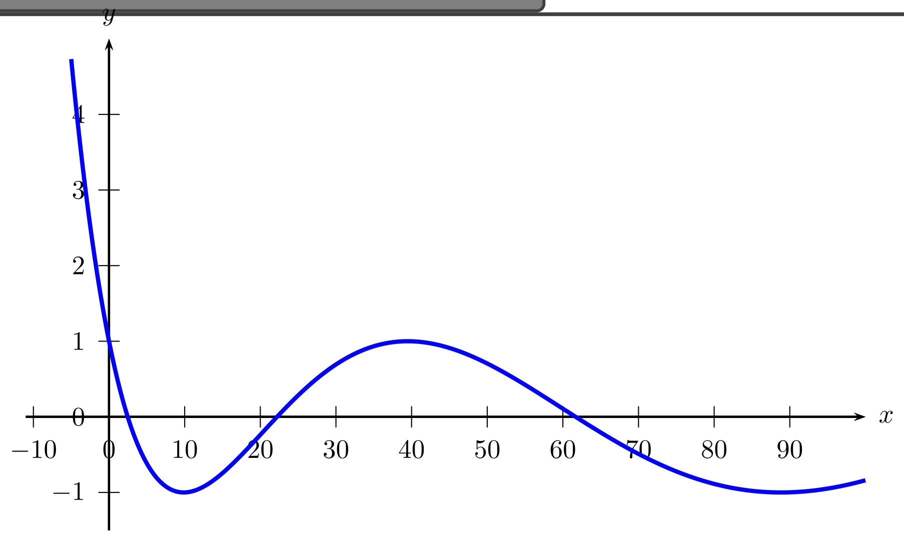
3. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour $x > 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

   f est alors décroissante sur les intervalle de la forme $\left[(2k\pi)^2, (2k\pi+1)^2\right]$, $k \in \mathbb{N}$ et croissante sur les intervalle de la forme $\left[(2k\pi+1)^2, (2k\pi+2)^2\right]$, $k \in \mathbb{N}$

   Pour $x < 0$ on a $f'(x) = \dfrac{-\mathrm{sh}(\sqrt{-x})}{2\sqrt{-x}} \leqslant 0$, f est ainsi décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

   On obtient le tracé suivant

Figure .1 – Tracé de la courbe représentative de f



Corrigé de l'exercice 23

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}}{\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}} &= \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2(2n+1)!}{4^n(n!)^2(2n+3)!} \\ &= \frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{4n^2}{4n^2} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} 1\end{aligned}$$

D'après le critère de D'Alembert la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} z^n$ est de rayon 1.

Si $r > 1$ alors $r^2 > 1$ et donc $\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} r^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Si $0 \leqslant r < 1$ alors $r^2 < 1$ et donc la suite $\left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi $\sup\left\{r > 0\ ,\ \left(\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} r^{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\right\} = 1$.

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ est donc de rayon 1.

2. Pour $x \in]-1, 1[$ on a

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(n!)^2(2n+1)}{(2n+1)!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4^n(n!)^2}{(2n)!} x^{2n}$$

D'où

$$\begin{aligned}
(1-x^2)y'-xy &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2}\\
&= \frac{4^0(0!)^2}{(2\times 0)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2}\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}x^{2n+2}-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+2}\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+2)!}-\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}-\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\right)x^{2n+2}\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\left(\frac{4(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}-1-\frac{1}{2n+1}\right)x^{2n+2}\\
&= 1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n)!}\frac{4(n+1)^2-(2n+2)(2n+1)-(2n+2)}{(2n+2)(2n+1)}x^{2n+2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

f est donc bien solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$.

3. Sur $]-1,1[$ cette équation différentielle est équivalente à $y'-\dfrac{x}{1-x^2}y=\dfrac{1}{1-x^2}$.

Posons $a : x\mapsto -\dfrac{x}{1-x^2}$, la fonction $A : x\mapsto \dfrac{\ln(1-x^2)}{2}$ est une primitive de a. Les solutions de l'équation homogène $y'-\dfrac{x}{1-x^2}y=0$ sont donc de la forme $x\mapsto\dfrac{K}{\sqrt{1-x^2}}$.

On cherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante. Soit K une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,1[$ et $y : x\mapsto\dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

On a alors, pour $x\in]-1,1[$

$$(1-x)^2y'(x)-xy(x)=\frac{(1-x^2)K'(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}K'(x)$$

Ainsi y est solution de l'équation différentielle lorsque K vérifie

$$\forall x\in]-1,1[,\qquad K'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction $x\mapsto\dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est donc une solution particulière de l'équation différentielle $(1-x^2)y'-xy=1$ sur $]-1,1[$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle sur $]-1,1[$ est

$$\left\{x\mapsto\frac{\arcsin(x)+K}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\ K\in\mathbb{R}\right\}$$

il existe donc $K\in\mathbb{R}$ tel que, pour $x\in]-1,1[$, $f(x)=\dfrac{\arcsin(x)+K}{\sqrt{1-x^2}}$.

Or $f(0)=0$, d'où $K=0$.

Finalement, on a

$$\forall x\in]-1,1[,\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}=\frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$